

# Application of generalized integral and conformal transforms on the solution of a problem of laminar forced convection inside annular sector ducts

T. Antonini Alves<sup>1</sup>, R.A.V. Ramos<sup>2</sup>, C.R.M. Maia<sup>2</sup>

1 Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC), Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/Campus Ponta Grossa, Av. Monteiro Lobato, s/nº, km 04, CEP 84.016-210, Ponta Grossa (PR), Brasil

2 Departamento de Engenharia Mecânica (DEM), Universidade Estadual Paulista – UNESP/Campus Ilha Solteira, Caixa Postal 31, CEP 15.385-000, Ilha Solteira (SP), Brasil

## Abstract

This work describes a hybrid analytical-numerical solution employing the Generalized Integral Transform Technique (GITT) to forced convection heat transfer in hydrodynamically fully developed and thermally non-developed Newtonian laminar flow inside annular sector ducts under Dirichlet boundary conditions, considering uniform temperature entrance profile. In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was utilized to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, the GITT was applied on the energy equation to obtain the temperature field. Numerical results were obtained for quantities of practical interest, such as bulk mean temperature, local and average Nusselt number, and thermal entry length. These results were compared, as much as possible, with the parameter values available in the literature and they presented a good agreement.

## OPEN ACCESS

**Published:** 01/12/2016

**Accepted:** 04/09/2015

**Submitted:** 09/12/2013

**DOI:**  
10.1016/j.rimni.2015.09.001

**Keywords:**  
Integral transform  
Conformal transform  
Forced convection  
Laminar flow  
Annular sector

## Resumo

Este trabalho descreve uma solução híbrida analítico-numérica aplicando a técnica da transformada integral generalizada (TTIG) na transferência de calor por convecção forçada de um escoamento laminar fluido dinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de um fluido *Newtoniano* em dutos de seção transversal com formato de setor de anel circular sob condições de contorno de *Dirichlet*, considerando um perfil de temperatura uniforme na entrada. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno uma transformação conforme foi utilizada, visando alterar o domínio para um sistema de coordenadas mais apropriado. Feito isso, a TTIG foi aplicada na equação da energia para obtenção do campo de temperatura. Os resultados numéricos foram obtidos para parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de *Nusselt* local e médio e comprimento de entrada térmica. Estes resultados foram comparados, quando possível, com os valores disponíveis na literatura e apresentaram uma ótima concordância.

## Palavras-chave

Transformada integral ; Transformação conforme ; Convecção forçada ; Escoamento laminar ; Setor de anel circular

## 1. Introdução

Processos de transferência de calor para escoamento interno de fluidos em dutos representam uma classe de problemas

difusivo-convectivos de grande interesse na engenharia. Na concepção de um equipamento, dutos de seção transversal circular são largamente empregados em razão da sua simplicidade construtiva. Desta forma, inúmeros trabalhos e investigações relacionados com esta classe de problemas já foram realizados e uma vasta documentação é encontrada na literatura [1], [2] and [3]. Por sua vez, o escoamento de fluidos em dutos que apresentam seção transversal de geometria não convencional encontra aplicações mais restritas, porém, do ponto de vista analítico-numérico, estes problemas sempre despertam ampla atenção, pois, devido à sua maior complexidade, a busca de soluções fomenta o desenvolvimento de novas metodologias e a construção de novas ferramentas computacionais.

Neste contexto, o presente trabalho trata do cálculo de parâmetros térmicos da transferência de calor por convecção forçada para o problema de escoamento laminar de fluidos *Newtonianos* em regime permanente, termicamente em desenvolvimento, com perfil de temperatura de entrada uniforme e submetido a condições de contorno do primeiro tipo (condições de *Dirichlet*), em dutos de seção transversal com formato de setor de anel circular.

Geralmente, problemas com essa geometria são resolvidos utilizando-se do sistema de coordenadas cilíndricas. Entretanto, para facilitar o tratamento analítico, utiliza-se uma transformação conforme apropriada, com o objetivo de transformar o domínio original em um retângulo no novo sistema de coordenadas. Além de facilitar a aplicação das

condições de contorno, esta transformação permite escrever a equação diferencial da energia de forma mais simples. Para a obtenção do campo de temperatura do escoamento aplica-se a técnica da transformada integral generalizada (TTIG) [4], pois, para este caso, a equação diferencial parcial (EDP) da equação da energia é transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, que é de fácil solução. Este procedimento vem sendo aplicado com sucesso para a obtenção da solução híbrida analítico-numérica de problemas difusivos e difusivo-convectivos com geometrias convencionais e não convencionais [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] and [25].

## 2. Modelagem matemática

Para a formulação do problema considera-se o escoamento laminar de fluidos *Newtonianos* em regime permanente, termicamente não desenvolvido, com perfil de temperatura de entrada uniforme e temperatura prescrita na parede. Além disso, considera-se ainda que as propriedades do fluido permanecem constantes em todo o domínio e que os efeitos da dissipação viscosa e da condução axial são desprezíveis. Desta forma, a equação da energia é expressa por:

$$\rho c_p w(x,y) \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y,z) \right] \quad (1)$$

$$\{(x,y) \in \Omega, z > 0\}$$

sendo que,  $\rho$  é a massa específica,  $c_p$  é o calor específico a pressão constante,  $k$  é condutividade térmica,  $w$  é a velocidade,  $T$  é a temperatura e  $\Gamma$  e  $\Omega$  são o contorno e o domínio, respectivamente, da seção transversal do duto analisado, conforme ilustrado na figura 1.

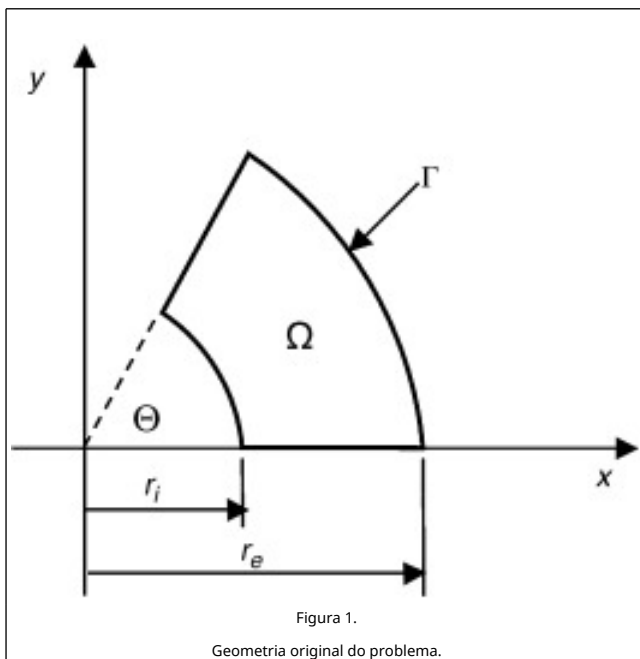


Figura 1.

Geometria original do problema.

As condições de entrada e de contorno são dadas por:

$$T(x,y,z) = T_0, \{(x,y) \in \Omega, z = 0\}, \quad (2)$$

$$T(x,y,z) = T_p, \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}. \quad (3)$$

sendo que,  $T_0$  é a temperatura da entrada e  $T_p$  é a temperatura da parede do duto.

O perfil de velocidade  $w(x,y)$  do escoamento no interior do duto de setor de anel circular é obtido através da TTIG, conforme apresentado detalhadamente em [26].

### 2.1. Adimensionalização

O potencial temperatura e os demais parâmetros físicos e geométricos foram adimensionalizados por:

$$\theta(X,Y,Z) = \frac{T(X,Y,Z) - T_p}{T_0 - T_p}, \quad (4)$$

$$X = \frac{x}{D_h}, \quad (5)$$

$$Y = \frac{y}{D_h}, \quad (6)$$

$$Z = \frac{z}{D_h Pe}, \quad (7)$$

$$D_h = \frac{4A_s}{Per}, \quad (8)$$

$$W(X,Y) = \frac{w(x,y)}{w_{med}}, \quad (9)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p w_{med} D_h}{k}. \quad (10)$$

sendo que,  $D_h$  é o diâmetro hidráulico,  $Pe$  é o número de *Péclet*,  $A_s$  é a área da seção transversal,  $Per$  é o perímetro do contorno analisado e  $w_{med}$  é a velocidade média do fluido.

Dessa forma, a equação da energia pode ser reescrita na forma adimensional, como:

$$W(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2}, \quad (11)$$

E as condições de entrada e de contorno adimensionalizadas são:

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \{(X,Y) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (12)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \{(X,Y) \in \Gamma, Z > 0\}. \quad (13)$$

### 2.2. Transformação de coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico do problema considera-se a seguinte transformação conforme:

$$Z = R e^{i\omega}, \quad (14)$$

sendo que,  $R_e = r_e/D_h$ ,  $Z = X + iY$  e  $\omega = u + iv$ .

Esta relação permite transformar o domínio do setor de anel circular no plano  $(X,Y)$  em um domínio retangular no plano  $(u,v)$  conforme ilustrado na figura 2.

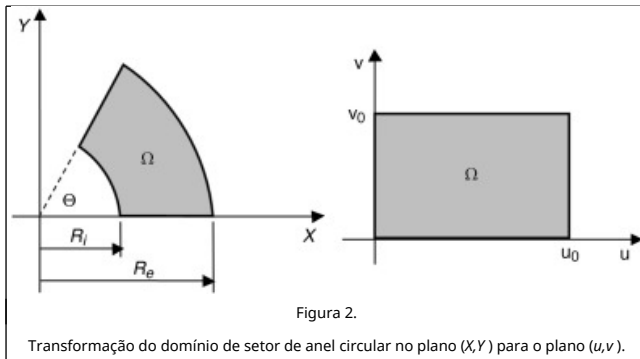


Figura 2.

Transformação do domínio de setor de anel circular no plano (X,Y) para o plano (u,v).

As relações de transformação de coordenadas são dadas por:

$$X = R_e e^{-v} \cos(u), \quad (15)$$

$$Y = R_e e^{-v} \sin(u). \quad (16)$$

A transformação conforme dada pela equação (14) satisfaz as condições de *Cauchy-Riemann*. Portanto, os coeficientes métricos  $h_u$ ,  $h_v$  e o Jacobiano  $J(u,v)$  desta transformação são dados por:

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = R_e e^{-v}, \quad (17)$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = R_e^2 e^{-2v}. \quad (18)$$

Como pode ser observado, o arco externo do setor de anel é dado pela reta  $v = 0$  no novo sistema de coordenadas e o arco interno pela reta  $v = v_0$ , com  $v_0 = \ln(R_e/R_i)$ . A coordenada  $u$  corresponde com a definição dada para o ângulo  $\theta$  do sistema de coordenadas cilíndricas.

Com isso, a equação da energia, equação (11), reescrita no novo sistema de coordenadas gerado pela transformação conforme é expressa por:

$$H(u,v) \frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial v^2} \quad (19)$$

sendo que,

$$H(u,v) = J(u,v) W(u,v). \quad (20)$$

As condições de entrada e de contorno neste novo sistema de coordenadas são dadas por:

$$\theta(u,v,Z) = 1, \{ (u,v) \in \Omega, Z = 0 \}, \quad (21)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \{ u = 0, 0 < v < v_0, Z > 0 \}, \quad (22)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \{ u = u_0, 0 < v < v_0, Z > 0 \}, \quad (23)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \{ 0 < u < u_0, v = 0, Z > 0 \}, \quad (24)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \{ 0 < u < u_0, v = v_0, Z > 0 \}. \quad (25)$$

### 2.3. Aplicação da técnica da transformada integral generalizada

Para a solução da equação da energia no novo sistema de coordenadas aplica-se a TTIG que, na sua essência, procederá à

remoção das derivadas parciais de segunda ordem. Para esta finalidade, o potencial  $\theta(u,v,Z)$  é escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, consideram-se os seguintes problemas auxiliares de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \{ 0 \leq u \leq u_0 \}, \quad (26)$$

com:

$$\psi(u) = 0, \{ u = 0 \}, \quad (27)$$

$$\psi(u) = 0, \{ u = u_0 \}. \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \{ 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (29)$$

com:

$$\phi(v) = 0, \{ v = 0 \}, \quad (30)$$

$$\phi(v) = 0, \{ v = v_0 \}. \quad (31)$$

Os autovalores e as autofunções associados a estes problemas são dados, respectivamente, por:

$$\mu_i = \frac{i\pi}{u_0}, i = 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

$$\psi_i(u) = \sin(\mu_i u), \quad (33)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{v_0}, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (34)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v). \quad (35)$$

As autofunções acima definidas são ortogonais que permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u,v,Z) du dv \quad (36)$$

transformada,

$$\theta(u,v,Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \text{ inversa}, \quad (37)$$

sendo que  $K_i(u)$  são as autofunções normalizadas dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{\sqrt{N_i}}, \quad (38)$$

com:

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i(u)^2 du = \frac{u_0}{2}. \quad (39)$$

sendo que  $Z_m(v)$  são as autofunções normalizadas dadas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{\sqrt{M_m}}, \quad (40)$$

com:

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m(v)^2 dv = \frac{v_0}{2}. \quad (41)$$

Para a determinação do potencial transformado efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas  $K_i(u)$  e  $Z_m(v)$  com a equação da energia, obtém-se o seguinte sistema de EDO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0, j \quad (42)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv. \quad (43)$$

Os parâmetros  $B_{ijnm}$  são integráveis e, consequentemente, conhecidos. A solução deste sistema de EDO permite a obtenção do potencial transformado, quando submetido à condição de entrada transformada dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, 0) du dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) du dv. \quad (44)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado pode ser determinado numericamente quando a expansão é truncada em uma dada ordem  $m = M$  e  $n = N$ . Portanto, utilizando-se da fórmula de inversão, determina-se o potencial temperatura adimensional:

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z). \quad (45)$$

Obviamente, quanto maior  $N$  e  $M$  maior será a precisão dos resultados, sendo que, do ponto de vista computacional, o duplo somatório poderia ser resolvido como proposto por [27], permitindo a redução deste custo através do reordenamento dos termos e substituição por um somatório simples. No entanto, pela simplicidade do problema em questão, isso não se torna necessário.

## 2.4. Parâmetros térmicos de interesse

### 2.4.1. Temperatura média de mistura

A temperatura média de mistura em sua forma adimensional é expressa por:

$$\theta_{méd}(Z) = \frac{T_{méd}(Z) - T_p}{T_0 - T_p} = \frac{1}{A_S^*} \int_{\Omega} \frac{\theta(X, Y, Z) W(X, Y) d\Omega}{W_{méd}(X, Y)}, \quad (46)$$

com:

$$W_{méd}(X, Y) = \int_{\Omega} W(X, Y) d\Omega = 1, \quad (47)$$

sendo que,  $A_S^* = A_S/D_h^2$  é a área da seção transversal adimensional. Portanto, no plano  $(u, v)$ ,  $\theta_{méd}$  é dado por:

$$\theta_{méd}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} \theta(u, v, Z) W(u, v) J(u, v) dv du. \quad (48)$$

### 2.4.2. Número de Nusselt

Os números de Nusselt local e o médio podem ser definidos, respectivamente, por:

$$Nu(Z) = -\frac{1}{4\theta_m(Z)} \frac{d\theta_{méd}(Z)}{dZ}, \quad (49)$$

$$Nu_{méd}(Z) = -\frac{1}{4Z} \ln \theta_{méd}(Z). \quad (50)$$

### 2.4.3. Comprimento de entrada térmica

O comprimento de entrada térmica é definido como sendo a posição em que o número de Nusselt local é 5% maior que o número de Nusselt na região em que o fluido está termicamente desenvolvido [28]. Dessa forma, tem-se:

$$L_{th} = \text{raiz positiva de } \{1,05Nu(\infty) - Nu(Z) = 0\}. \quad (51)$$

## 3. Resultados e discussão

Para a obtenção dos resultados numéricos, o método de quadratura de Gauss foi utilizado para o cálculo das integrais envolvida nos coeficientes  $B_{ijnm}$  e nos parâmetros físicos de interesse. Desta forma, é necessária, também, a determinação das autofunções e do Jacobiano nestes pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações diferenciais foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado utilizando-se da rotina DIVPAG da biblioteca IMSL Fortran [29] e do truncamento da expansão dada pela equação (45) para diversas ordens  $M$  e  $N$ .

Foi verificado, através de uma análise de convergência, que na região de entrada do escoamento,  $Z < 0,001$ , a convergência é relativamente lenta, sendo necessário considerar truncamentos da série com ordem  $M = N = 25$  para a obtenção de, pelo menos, 3 dígitos de precisão. Para a região onde o escoamento já se encontra termicamente desenvolvido é observado que a série que determina o potencial temperatura converge mais rapidamente, sendo necessário considerar apenas 20 termos para cada direção para uma precisão em torno de 4 dígitos.

Na tabela 1 são apresentados os resultados obtidos para a análise de convergência da temperatura adimensional média de mistura, em função do ângulo  $\Theta$  e da ordem  $N = M$  de truncamento da série, para uma razão de aspecto  $r^* = r/r_e = 0,20$  e para uma coordenada axial adimensionalizada  $Z = 0,001$ . A tabela 2 mostra a convergência da temperatura adimensional média de mistura em função da razão de aspecto e da ordem  $N = M$  de truncamento da série para um ângulo  $\Theta = 330^\circ$  e para  $Z = 0,001$ .

**Tabela 1. Convergência da temperatura adimensional média de mistura,  $\theta_{méd}(Z)$ , considerando uma razão de aspecto  $r^* = 0,20$  em função da ordem de truncamento da série e do ângulo  $\Theta$  para  $Z = 10^{-3}$**

$\Theta$	Ordem $N = M$ de truncamento da série					
	10	15	20	25	30	Valor convergido
5°	0,9397	0,9403	0,9414	0,9416	0,9416	0,9416
10°	0,9431	0,9436	0,9437	0,9433	0,9433	0,9433

15°	0,9454	0,9455	0,9450	0,9440	0,9440	0,9440
45°	0,9494	0,9478	0,9459	0,9444	0,9444	0,9444
60°	0,9495	0,9475	0,9456	0,9444	0,9444	0,9444
90°	0,9489	0,9464	0,9449	0,9441	0,9441	0,9441
150°	0,9472	0,9446	0,9432	0,9426	0,9426	0,9426
180°	0,9465	0,9438	0,9423	0,9417	0,9417	0,9417
210°	0,9457	0,9431	0,9416	0,9409	0,9409	0,9409
270°	0,9445	0,9420	0,9405	0,9396	0,9396	0,9396
300°	0,9440	0,9416	0,9400	0,9390	0,9390	0,9390
350°	0,9432	0,9409	0,9394	0,9382	0,9382	0,9382

Tabela 2. Convergência da temperatura adimensional média de mistura,  $\theta_{med}(Z)$ , considerando um ângulo  $\Theta = 330^\circ$  em função da ordem de truncamento da série e da razão de aspecto  $r^*$  para  $Z = 10^{-3}$

$r^*$	Ordem $N = M$ de truncamento da série					
	10	15	20	25	30	Valor convergido
0,05	0,9507	0,9469	0,9433	0,9412	0,9412	0,9412
0,10	0,9474	0,9439	0,9414	0,9401	0,9401	0,9401
0,20	0,9435	0,9412	0,9396	0,9385	0,9385	0,9385
0,30	0,9411	0,9395	0,9382	0,9371	0,9371	0,9371
0,40	0,9377	0,9381	0,9370	0,9359	0,9359	0,9359
0,50	0,9393	0,9368	0,9358	0,9349	0,9349	0,9349
0,60	0,9361	0,9353	0,9346	0,9338	0,9338	0,9338
0,70	0,9345	0,9339	0,9333	0,9327	0,9327	0,9327
0,80	0,9329	0,9323	0,9319	0,9314	0,9314	0,9314
0,90	0,9313	0,9308	0,9304	0,9300	0,9300	0,9300

Nas Figura 3, Figura 4 and Figura 5 são apresentados os comportamentos da temperatura adimensional média de mistura, dos números de Nusselt local e médio, respectivamente, em função da razão de aspecto  $r^* = r_i/r_e$  e para os diversos ângulos  $\Theta$  (5°, 15°, 30°, 60°, 90°, 180°, 270° e 350°). Como esperado, os parâmetros térmicos de interesse decrescem com o aumento da coordenada axial adimensionalizada  $Z$  independentemente do ângulo  $\Theta$ .

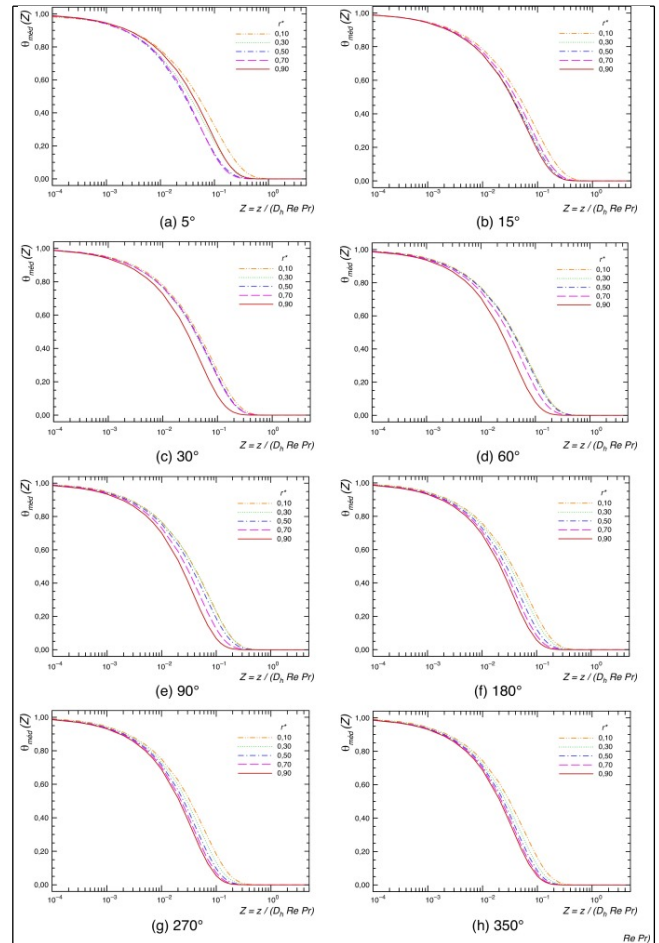
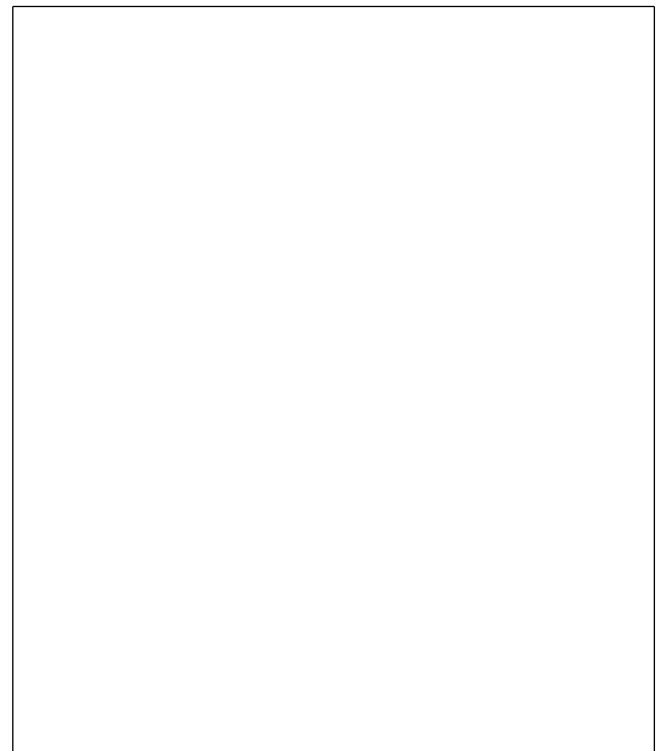
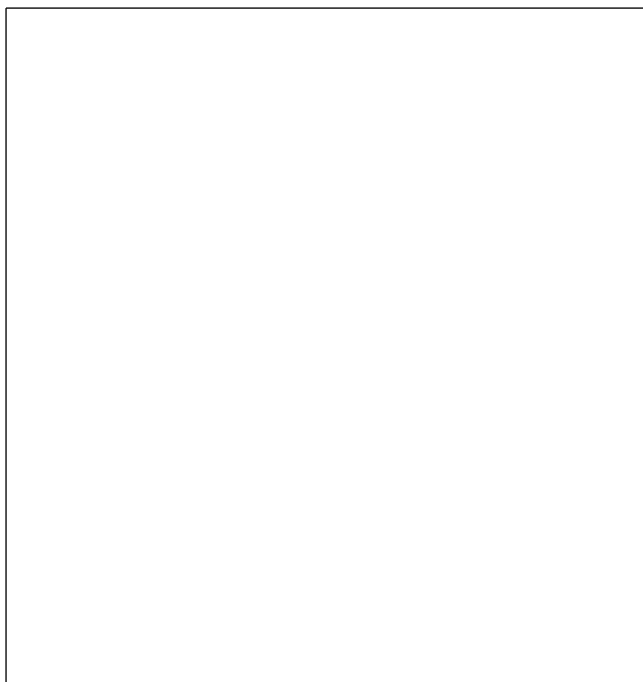


Figura 3.

Comportamento da temperatura adimensional média de mistura para diversas configurações dos dutos de setor de anel circular.





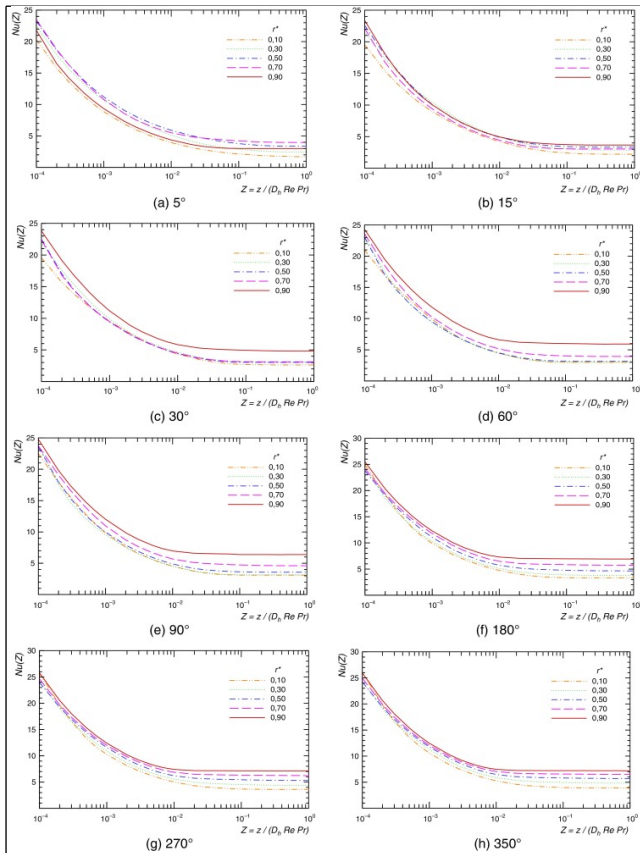


Figura 4.

Comportamento do número de Nusselt local para diversos dutos de setor de anel circular.

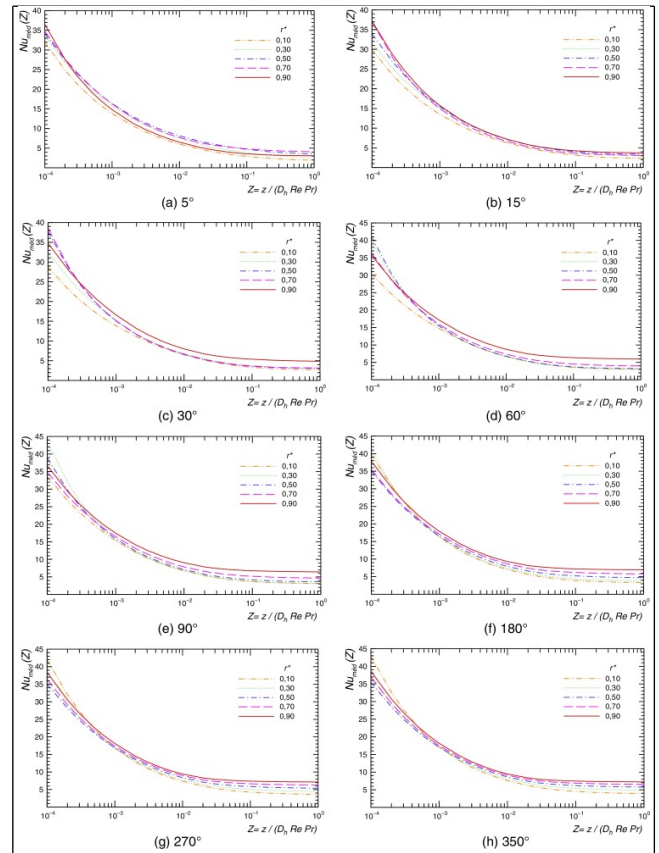


Figura 5.

Comportamento do número de Nusselt médio para diversos dutos de setor de anel circular.

Nas Tabela 3 and Tabela 4, são apresentados os resultados obtidos para o número de Nusselt limite ( $Nu_{\infty}$ ) e o comprimento de entrada térmica ( $L_{th}$ ), respectivamente, considerando diversas configurações geométricas dos dutos de setor de anel circular.

**Tabela 3. Número de Nusselt limite,  $Nu_{\infty}$ , para diversas configurações dos dutos analisados**

$r^*$	5°	15°	30°	60°	90°	180°	270°	350°
0,05	1,567	2,061	2,489	2,911	3,094	3,284	3,457	3,639
0,10	1,715	2,219	2,626	2,979	3,102	3,308	3,604	3,875
0,15	1,878	2,384	2,757	3,024	3,095	3,381	3,782	4,112
0,20	2,055	2,553	2,879	3,043	3,090	3,492	3,978	4,348
0,25	2,246	2,724	2,981	3,042	3,054	3,632	4,186	4,582
0,30	2,453	2,891	3,055	3,032	3,133	3,798	4,403	4,812
0,35	2,671	3,029	3,095	3,030	3,194	3,985	4,626	5,037
0,40	2,901	3,180	3,098	3,045	3,287	4,191	4,852	5,257
0,45	3,136	3,279	3,072	3,087	3,413	4,414	5,080	5,478
0,50	3,372	3,330	3,033	3,162	3,573	4,652	5,312	5,685
0,55	3,596	3,322	3,000	3,277	3,769	4,903	5,538	5,898
0,60	3,790	3,258	2,991	3,437	4,005	5,165	5,779	6,106
0,65	3,928	3,158	3,024	3,651	4,284	5,439	6,003	6,304
0,70	3,978	3,056	3,118	3,937	4,607	5,727	6,223	6,493
0,75	3,891	2,988	3,296	4,279	4,976	5,974	6,453	6,682
0,80	3,649	3,004	3,596	4,718	5,401	6,316	6,683	6,857
0,85	3,303	3,180	4,074	5,251	5,865	6,608	6,899	7,028
0,90	3,009	3,673	4,817	5,924	6,378	6,914	7,105	7,192

0,95	3,225	4,848	5,944	6,666	6,932	7,207	7,293	7,326
1,00	7,619	7,619	7,619	7,619	7,619	7,619	7,619	7,619

Tabela 4. Comprimento de entrada térmica,  $L_{th}$ , para diversas configurações dos dutos analisados

$r^*$	5°	15°	30°	60°	90°	180°	270°	350°
0,05	0,3309	0,1494	0,0774	0,0497	0,0458	0,0520	0,0599	0,0650
0,10	0,3242	0,1372	0,0714	0,0481	0,0453	0,0530	0,0607	0,0646
0,15	0,3096	0,1260	0,0675	0,0469	0,0452	0,0542	0,0613	0,0632
0,20	0,2861	0,1163	0,0639	0,0458	0,0453	0,0554	0,0614	0,0607
0,25	0,2648	0,1085	0,0610	0,0448	0,0458	0,0569	0,0607	0,0564
0,30	0,2425	0,1015	0,0577	0,0444	0,0466	0,0581	0,0584	0,0511
0,35	0,2237	0,0954	0,0537	0,0442	0,0478	0,0589	0,0548	0,0454
0,40	0,2089	0,0901	0,0498	0,0446	0,0494	0,0584	0,0498	0,0394
0,45	0,1914	0,0828	0,0468	0,0453	0,0512	0,0567	0,0442	0,0324
0,50	0,1790	0,0727	0,0448	0,0467	0,0534	0,0532	0,0372	0,0277
0,55	0,1689	0,0620	0,0439	0,0485	0,0559	0,0482	0,0316	0,0227
0,60	0,1567	0,0546	0,0436	0,0511	0,0573	0,0416	0,0257	0,0193
0,65	0,1421	0,0478	0,0441	0,0536	0,0568	0,0337	0,0215	0,0166
0,70	0,1158	0,0448	0,0454	0,0554	0,0536	0,0256	0,0183	0,0143
0,75	0,0823	0,0429	0,0484	0,0567	0,0462	0,0201	0,0149	0,0120
0,80	0,0596	0,0423	0,0528	0,0514	0,0334	0,0165	0,0121	0,0105
0,85	0,0491	0,0464	0,0567	0,0394	0,0228	0,0130	0,0101	0,0093
0,90	0,0438	0,0538	0,0497	0,0205	0,0158	0,0100	0,0088	0,0084
0,95	0,0473	0,0534	0,0213	0,0122	0,0093	0,0084	0,0081	0,0081
1,00	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080

Os comportamento do número de Nusselt limite e do comprimento de entrada térmica, parametrizados em  $\Theta$ , são mostrados nas Figura 6 and Figura 7, respectivamente. Pode ser notado que os resultados obtidos para os diversos dutos de setor de anel circular convergem para um mesmo valor quando  $r^* \rightarrow 1$ ,  $Nu_{\infty} \approx 7,6$  e  $L_{th} = 0,0080$ , valores estes, correspondentes ao problema térmico do escoamento laminar em canais de placas planas paralelas com temperatura uniforme em ambas as placas [30] and [31]. É interessante ainda observar que, para pequenos ângulos ( $\Theta < 30^\circ$ ), à medida que  $r^*$  diminui a geometria do setor de anel circular vai se aproximando daquela correspondente à um duto de seção transversal quadrada, onde, por exemplo, o número de Nusselt limite passa por um mínimo local ( $\Theta \approx 30^\circ$ ). Ressalta-se que, o número de Nusselt limite para  $r^* \rightarrow 0$ , corresponde à geometria do setor circular e os valores obtidos se aproximam daqueles referentes aos respectivos ângulos  $\Theta$  [32].

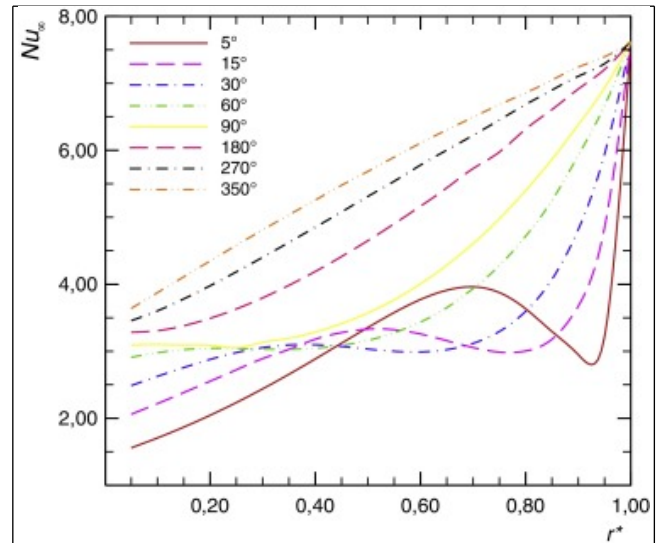


Figura 6.

Comportamento do número de Nusselt limite para diversos formatos de setor de anel circular.

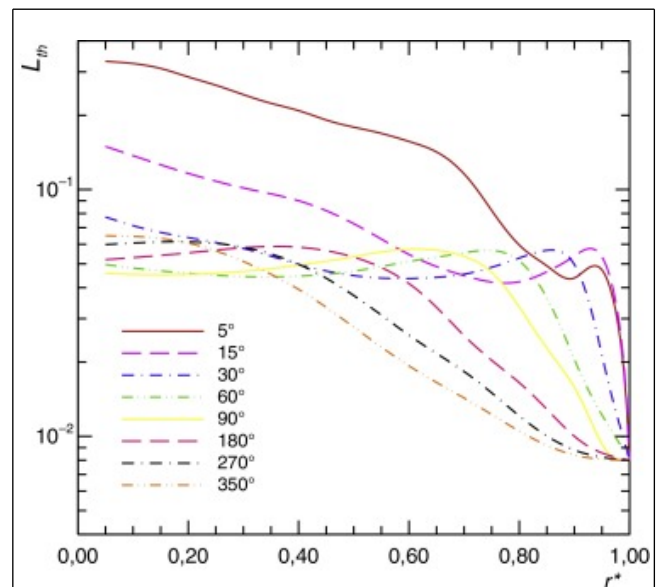


Figura 7.

Comportamento do comprimento de entrada térmica para diversos formatos de setor de anel circular.

Finalmente, destaca-se que os resultados obtidos para o número de Nusselt limite e apresentados na tabela 3 e na figura 6, quando comparados com os mostrados em [32] apresentam uma ótima concordância, gerando uma diferença inferior a 1%.

#### 4. Conclusões

Para a solução do problema estudado, devido ao formato geométrico não convencional do duto, as dificuldades inerentes para a aplicação das condições de contorno foram removidas utilizando-se uma transformação conforme adequada capaz de representar a geometria do duto de setor de anel circular em um domínio com contorno de formato retangular. A aplicação da TTIG sobre a equação da energia gerou um sistema acoplado e infinito de EDO para o potencial temperatura transformado que foi resolvido numericamente truncando-se a expansão em um número finito de termos.

Observou-se que a convergência do potencial temperatura é lenta na região de entrada do escoamento ( $Z < 0,001$ ), sendo necessária uma ordem de truncamento relativamente alta para o sistema de equações diferenciais do potencial transformado para a obtenção de, pelo menos, 3 dígitos de precisão.

Parâmetros térmicos de interesse, tais como, temperatura média de mistura, números de *Nusselt* local e médio e comprimento de entrada térmica, foram calculados e comparados, quando possível, com os resultados disponíveis na literatura, para dutos de diversas configurações geométricas, tendo sido observada uma ótima concordância.

Finalmente, observa-se que a TTIG é aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, ressaltando-se, aqui, o presente problema, o qual muitas vezes não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

## Referências

- [1] W.M. Rohsenow, J.P. Hartnett, Y.I. Cho; Handbook of Heat Transfer; McGraw-Hill, New York (1998)
- [2] S. Kakaç, R.K. Shah, W. Aung; Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer; John Wiley, New York (1998)
- [3] A. Bejan, A.D. Kraus; Heat Transfer Handbook; John Wiley & Sons, Hoboken (2003)
- [4] R.M. Cotta; The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering; Begell House Inc, New York (1998)
- [5] C.R.M. Maia, Solução de Problemas Difusivos e Difusivo-convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2003.
- [6] T.A. Alves, Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, Brasil, 2006.
- [7] C.R.M. Maia, R.A.V. Ramos, M.F. Pelegrini, T.A. Alves; Heat transfer study in slug flow on elliptical ducts cross section by generalized integral transform technique; Thermal Engineering, 4 (2005), pp. 154-163
- [8] C.R.M. Maia, J.B. Aparecido, L.F. Milanez; Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian fluids in ducts of elliptical cross section; International Journal of Thermal Sciences, 45 (2006), pp. 1066-1072
- [9] G.G.C. Lima, C.A.C. Santos, A. Haag, R.M. Cotta; Integral transform solution of internal flow problems based on navier stokes equations and primitive variables formulation; International Journal for Numerical Methods in Engineering (Print), 69 (2007), pp. 544-561
- [10] C.P. Naveira-Cotta, R.M. Cotta, H.R.B. Orlande; Inverse analysis of forced convection in micro-channels with slip flow via integral transforms and bayesian inference; International Journal of Thermal Sciences, 49 (2010), pp. 879-888
- [11] R.L.E. Silva, C.A.C. Santos, J.N.N. Quaresma, R.M. Cotta; Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts; International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 21 (2011) (2011), pp. 219-243
- [12] L.A. Sphaier; Integral transform solution for heat transfer in parallel-plates micro-channels: Combined electroosmotic and pressure driven flows with isothermal walls; International Communications in Heat and Mass Transfer, 39 (2012), pp. 769-775
- [13] R.M. Cotta, D.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta, L.A. Sphaier, J.N.N. Quaresma; Unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems, numerical heat transfer, Part A; Applications., 63 (2013), pp. 840-866
- [14] D.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta, R.M. Cotta; Conjugated convection-conduction analysis in microchannels with axial diffusion effects and a single domain formulation; Journal of Heat Transfer, 135 (2013), pp. 091-108
- [15] D.J.M.N. Chahub, L.A. Sphaier, L.S.B. Alves; Integral transform solution of convective heat transfer problems using upwind approximations, numerical heat transfer, Part B; Fundamentals., 63 (2013), pp. 167-187
- [16] D.C. Knupp, R.M. Cotta, C.P. Naveira-Cotta; Heat transfer in microchannels with upstream-downstream regions coupling and wall conjugation effects, numerical heat transfer, Part B; Fundamentals, 64 (2013), pp. 365-387
- [17] D.J.M.N. Chahub, L.A. Sphaier, L.S.B. Alves; Integral transform analysis of poisson problems that occur in discrete solutions of the incompressible navier-stokes equations; Journal of Physics, Conference Series (Online), 547 (2014), p. 012040
- [18] L.A. Sphaier, A. Barletta; Unstable mixed convection in a heated horizontal porous channel; International Journal of Thermal Sciences, 78 (2014), pp. 77-89
- [19] R.M. Cotta, D.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta, L.A. Sphaier, J.N.N. Quaresma; The Unified Integral Transforms (UNIT) algorithm with total and partial transformation; Computational Thermal Sciences: An International Journal, 6 (2014), pp. 507-524
- [20] T. Antonini Alves, M.F. Pelegrini, R.A.V. Ramos, C.R.M. Maia; Limiting power of nuclear fuel cells with variable sources; International Journal of Science and Advanced Technology, 4 (2014), pp. 7-15
- [21] M.F. Pelegrini, T. Antonini Alves, R.A.V. Ramos, C.R.M. Maia; Transient heat diffusion problems with variable thermal properties solved by generalized integral transform technique; International Review of Mechanical Engineering (Testo Stampato), 8 (2014), pp. 931-940
- [22] M.F. Pelegrini, T. Antonini Alves, F.B. Nishida, R.A.V. Ramos, C.R.M. Maia; Hybrid Analytical-Numerical Analysis of SAE 4150 Alloy Steel Rods Cooling; Advanced Materials Research, 1082 (2014), pp. 187-190
- [23] D.C. Knupp, R.M. Cotta, C.P. Naveira-Cotta, S. Kakaç; Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation; International Journal of Thermal Sciences, 88 (2015), pp. 248-257
- [24] D.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta, R.M. Cotta; Fluid flow and conjugated heat transfer in arbitrarily shaped channels via single domain formulation and integral transforms; International Journal of Heat and Mass Transfer, 82 (2015), pp. 479-489
- [25] D.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta, A. Refer, M. Tiwari, R.M. Cotta, D. Poulikakos; Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques; International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 25 (2015), pp. 1444-1462
- [26] T. Antonini Alves, R.A.V. Ramos, C.R.M. Maia; Escoamento laminar em dutos de setor de anel circular; Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, 19 (2015), pp. 03-15
- [27] M.D. Mikhailov, R.M. Cotta; Ordering rules for double or triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems; International Communications in Heat and Mass Transfer, 23 (1996), pp. 299-303



[28] R.K. Shah, A.L. London; Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Advances in Heat Transfer, Supplement 1; Academic Press Inc., New York (1978)

[29] IMSL Library, Edition 7, GNB Building, 7500 BallaieBlod, Houston, Texas 77036, 1994.

[30] G.M. Brown; Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in circular or flat conduit; American Institute of Chemical Engineers Journal, 6 (1960), pp. 179–183

[31] R.K. Shah; Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry; International Journal of Heat and Mass Transfer, 18 (1975), pp. 849–862

[32] T.M. Ben-Ali, H.M. Soliman, E.K. Zariffteh; Further results for laminar heat transfer in annular sector and circular sector ducts; Journal of Heat Transfer, 111 (1989), pp. 1090–1093